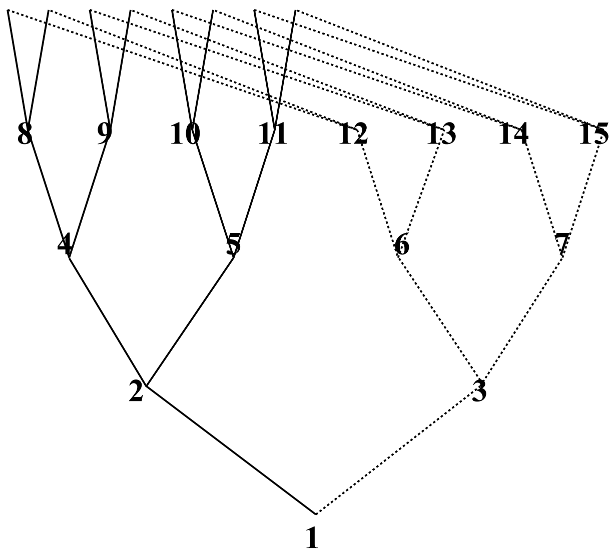
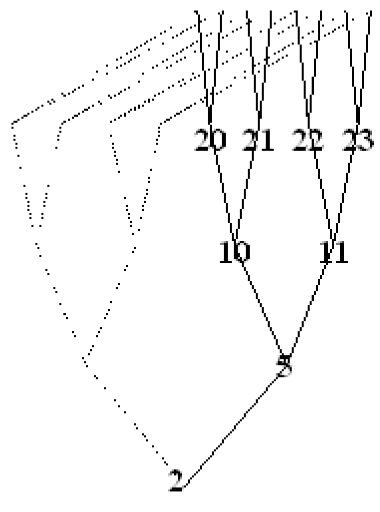
<u>**COMMENT RELIER L'IMPLEXE ET LA PARENTÉ**</u>
<u>**ou théorème de Pierre RENAUD.**</u>

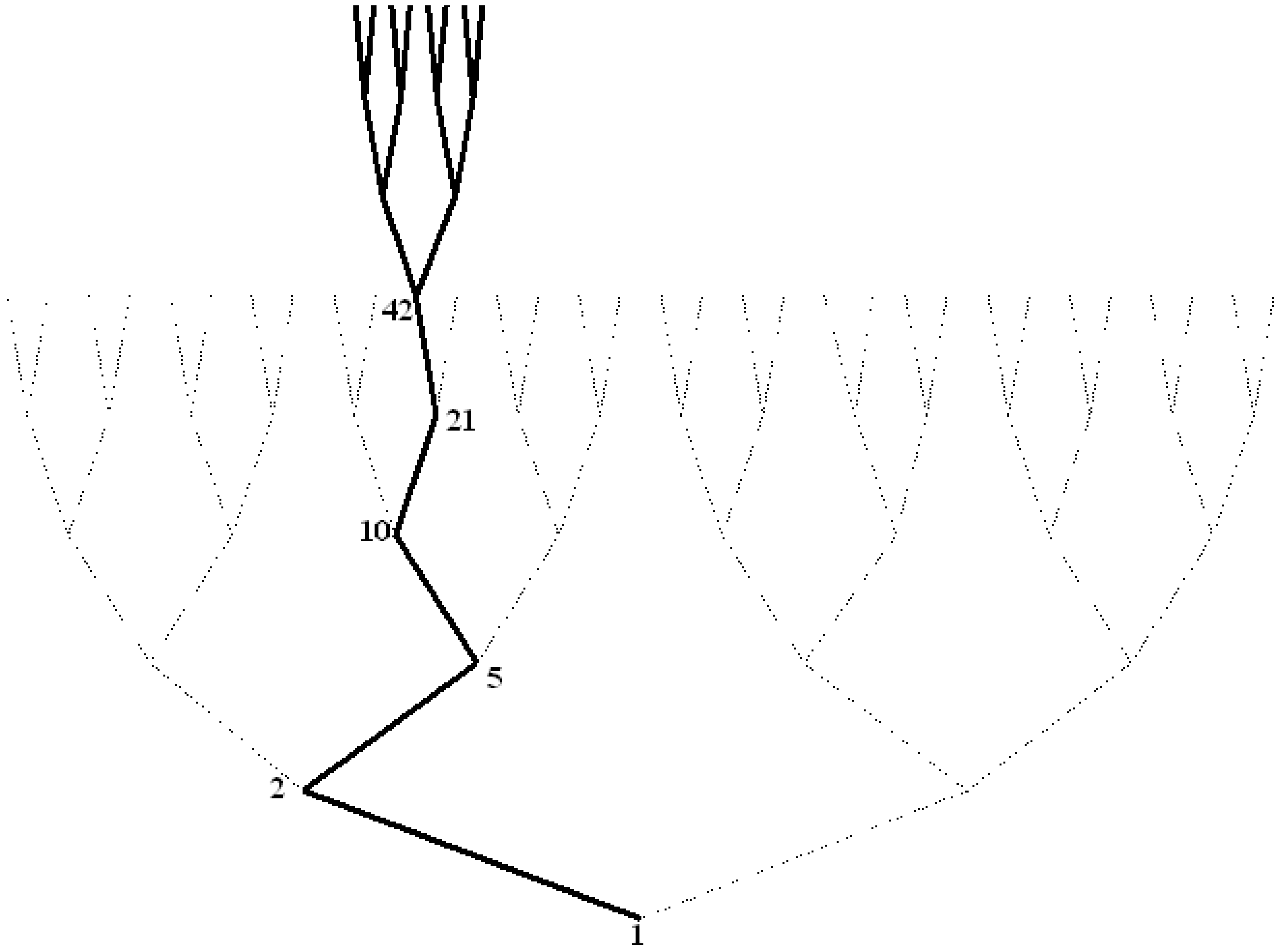
Arbre à parenté constante et généralisée :



Dans l'arbre ci-dessous, à la 4ème génération, ramenons la demi génération de droite sur la demi génération de gauche. Nous réduisons ainsi de moitié le nombre des ancêtres de la 4ème génération. Nous pouvons alors élaguer la partie droite depuis le 1 sans affecter les ancêtres de la 4ème génération. Ces boucles d'implexe correspondent toutes à une parenté canonique du 4ème degré et engendrent une valeur d'implexe de 1/2 à la 4ème génération.



Reprenons le même principe à partir de la 4ème génération de 2 en ramenant cette fois la moitié gauche sur la moitié droite. Nous réduisons encore de moitié le nombre des ancêtres de la 4ème génération de 2 donc de la 5ème de 1. Nous pouvons cette fois-ci élaguer la partie gauche de l'arbre depuis 2 sans affecter les ancêtres de la 4ème génération de 2 donc de la 5ème de 1 engendrant une valeur d'implexe de 1/2 + 1/4 à cette génération.



Poursuivons l'opération dans l'ascendance de l'arbre en ramenant une moitié sur l'autre, alternativement à droite et à gauche pour la symétrie et en élaguant l'arbre comme précédemment. On aboutit au schéma ci-dessus. La partie restante de l'arbre prend la forme d'une sorte de pin parasol au tronc en zigzag portant un rameau d'ancêtres en nombre constant égal à 2^3 à son sommet. La valeur de l'implexe prend la forme de la somme de la progression géométrique bien connue : 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + …. + 1/ 2^n qui converge vers 1.

Cet arbre où le degré de parenté canonique est constant et égal à 4 conduit à toute génération n à un nombre d'ancêtres constant égal à 2^3. Cet exemple élémentaire où le degré de parenté canonique p est de 4 générations se généralise sans problème à une valeur quelconque de p. Il conduit à toute génération n supérieure à p à un nombre d'ancêtres 2^{p-1} et à partir de la génération p l'implexe prend la forme : 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + …… + 1/ 2^n de la somme de la progression géométrique précédente.

Tout arbre dans lequel le degré de parenté canonique, aurait pris, ne serait-ce qu'une fois, une valeur supérieure à p ne peut conduire à la génération n qu'à un nombre d'ancêtres supérieur à 2^{p-1}.

La réciproque donne ce théorème : si dans un arbre généalogique idéal complet (sans lacunes et « rationalisé ») on a, à la génération n, au lieu de 2^n ancêtres seulement 2^p le degré de parenté canonique ne peut pas y avoir été systématiquement supérieur à p +1. Il est donc descendu à p +1 si celle-ci a été constante et systématique (cas pratiquement impossible à envisager dans le sens de la descendance) et inférieure à p +1 dans le cas contraire. Donc le degré de parenté canonique est descendu, en toute rigueur, à une valeur théorique $d \leq p + 1$ et en pratique $d \leq p$.

Si à la génération n on a N ancêtres tel que $2^{p-1} < N < 2^p$ on peut donc dire que le degré de parenté canonique est descendu, en pratique, à une valeur ≤ p. Cette dernière formulation du théorème paraît plus réaliste.

Peut-on alors considérer que ce théorème permet de définir p comme le « degré de parenté moyen équivalent » des parentés extrêmes rencontrées dans l'arbre ? La connaissance de cette valeur permettrait d'estimer le nombre de nos ancêtres réels à une génération n lointaine, en dépit de l'inconnu des lacunes. Elle doit être supérieure au degré de parenté du 7ème degré exigé comme minimum de consanguinité, dans les temps anciens, à supposer que cette règle ait été systématiquement respectée. Une augmentation de 1 degré de la « parenté moyenne équivalente » de p à p+1 augmenterait de 2^p le nombre possible des ancêtres réels. Si p = 10 ce nombre augmenterait de 1000 environ. Si p = 15 il augmenterait de 32000 environ. Il me semble que cette valeur p = 15, valant deux fois le degré de parenté minimal exigé du 7ème degré peut être un ordre de grandeur réaliste envisageable, une sorte de degré de parenté « hyperfocal » par analogie avec l'optique. Il conduirait à un nombre d'ancêtres de 32000 qui pourrait être l'ordre de grandeur du nombre maximal d'ancêtres d'un de-cujus contemporain au-delà de sa 15ème génération.

L'implexe à la génération n vaut alors $I = 1 - 2^p/2^n$.

soit $I = 1 - 1/2^{n-p}$. (§)

Si n = 30 et p = 10 on a : $I = 1 - 1/2^{20} = 1 - 1/1.000.000$.

Si n = 30 et p = 15 on a : $I = 1 - 1/2^{15} = 1 - 1/32.000$.

Ces valeurs d'implexe sont très proches de celle de l'asymptote : 1.

Il me semble par ailleurs que la formule (§) répond dans une certaine mesure (celle des hypothèses de « rationalisation ») à la question du C.G.D.C sur Internet :

Un scientifique (non Centralien, il y en a…), guidé par Google après avoir lancé une chasse à l'implexe (le C.G.D.C. apparaît en première page !…) a apprécié la qualité de nos réflexions et soulève une autre interrogation : logiquement, le degré d'implexe doit augmenter lorsqu'on remonte dans le temps, et cela d'autant plus que le lieu de vie est petit et isolé. Quelqu'un a-t-il trouvé une corrélation indiscutable ?

En effet la formule montre que l'implexe croît quand n croit (et que l'on recule dans le temps) et quand le degré de parenté canonique p diminue (avec le resserrement de l'endogamie).